

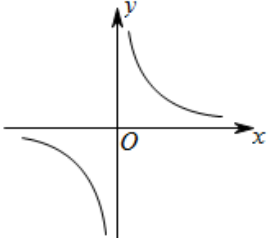
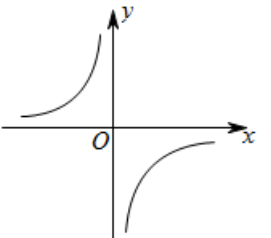
反比例函数综合



知识储备

想要课堂效率高，知识储备很重要



🔍 线索	📝 笔记	
反比例函数	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	
k 的符号	$k > 0$	$k < 0$
图象		
图象特征	双曲线两分支分别位于第 <u>一、三</u> 象限	双曲线两分支分别位于第 <u>二、四</u> 象限
函数增减性	每一个象限内， y 随 <u>x的增大而减小</u>	每一个象限内， y 随 <u>x的增大而增大</u>
📝 总结 ① 反比例函数的增减性不是连续的，在描述其增减性时，一定要加上“<u>在每一个象限内</u>”。 ② 已知自变量的大小，比较函数值的大小，不能笼统的利用“$k > 0$，y随<u>x的增大而减小</u>”，而是先看<u>象限，确定正负</u>；只有<u>在同一象限时</u>才能利用增减性比较函数值大小。		



本节导图



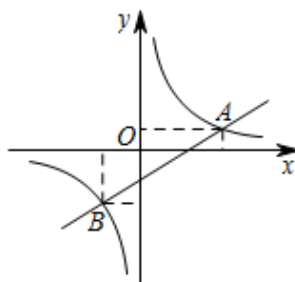
一、反比例函数与一次函数交点问题

反比例函数与一次函数的交点问题：

线索

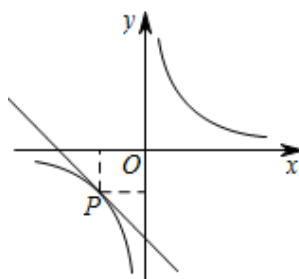
笔记

当判别式 $\Delta > 0$ 时



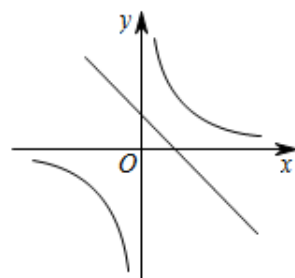
意味着一次函数与反比例函数有两个不相同交点，直线与双曲线相交，方程的两根即为交点的横坐标。

当判别式 $\Delta = 0$ 时



意味着一次函数与反比例函数只有一个交点，直线与双曲线相切，方程的根即为交点的横坐标。

当判别式 $\Delta < 0$ 时



意味着一次函数与反比例函数没有交点，直线与双曲线相离。



总结

联立两个函数 $\begin{cases} y = k_1x + b \\ y = \frac{k_2}{x} \end{cases}$ 所得的一元二次方程 $k_1x^2 + bx - k_2 = 0$ ，求解一元二次方程。

已知一次函数解析式为 $y = k_1x + b$ （只含一个待定系数），反比例函数解析式为 $y = \frac{k_2}{x}$ ，且直线与双曲线的交点个数情况已知，求参数的取值或取值范围问题：

🔍 线索

📝 笔记

直线与双曲线	交点个数	递推关系	判别式
相交	2	$\Leftrightarrow$	$\Delta > 0$
相切	1	$\Leftrightarrow$	$\Delta = 0$
相离	0	$\Leftrightarrow$	$\Delta < 0$



总结

联立一次函数与反比例函数 $\begin{cases} y = k_1x + b \\ y = \frac{k_2}{x} \end{cases}$ ，得到的一元二次方程 $k_1x^2 + bx - k_2 = 0$ 。

依据判别式的等式（或不等式）关系，可求待定系数的取值（或取值范围）。

【小技巧】

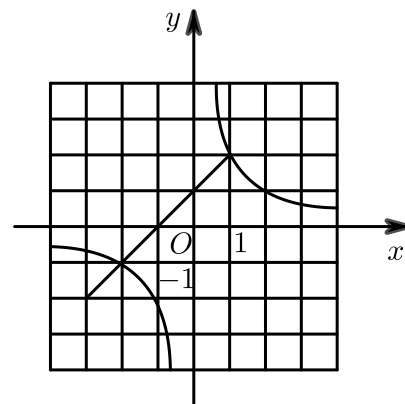
- ① 当 k 确定，一次函数 $y = kx + b$ 是平行于 $y = kx$ 的直线，
 - ② 当 b 确定，一次函数 $y = kx + b$ 是绕定点 $(0, b)$ 旋转的直线。
 - ③ 一次函数 $y = k(x - m) + n$ 是绕过定点 (m, n) 旋转的直线。
1. 如果直线 $y = mx$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的一个交点 A 的坐标为 $(3, 2)$ ，则它们的另一个交点 B 的坐标为（ ）。
- A. $(-3, 2)$ B. $(-3, -2)$ C. $(3, -2)$ D. $(2, -3)$

【答案】B

【解析】 因为直线 $y = mx$ 过原点，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的两个分支关于原点对称，所以其交点坐标关于原点对称， A 的坐标为 $(3, 2)$ ，另一个交点 B 的坐标为 $(-3, -2)$ 。故选 B。

【标注】【知识点】求反比例函数与一次函数交点坐标

2. 如图，是一次函数 $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象，则关于 x 的方程 $kx + b = \frac{2}{x}$ 的解为（ ）。



A. $x_1 = 1, x_2 = 2$

B. $x_1 = -2, x_2 = -1$

C. $x_1 = 1, x_2 = -2$

D. $x_1 = 2, x_2 = -1$

【答案】 C

【解析】 方程 $kx + b = \frac{2}{x}$ 的解为 $x_1 = 1, x_2 = -2$.

故选C.

【标注】 【知识点】反比例函数与方程、不等式

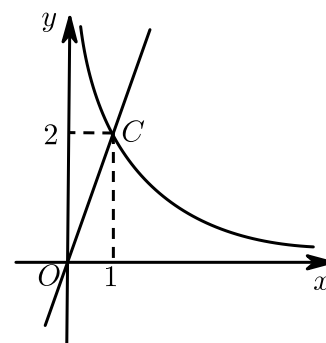
3. 若一次函数 $y = 3x + b$ 和反比例函数 $y = \frac{b-3}{x}$ 的图象有两个交点，当 $b = \underline{\quad}$ 时，有一个交点的纵坐标为6.

【答案】 5

【解析】 由题意可得 $y = 6$ ，代入 $y = 3x + b$ 和 $y = \frac{b-3}{x}$ 可得 $b = 5$.

【标注】 【知识点】反比例函数与一次函数综合

4. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 和正比例函数 $y = mx$ 的部分图象如图，由此可以得到方程 $\frac{k}{x} = mx$ 的解为 $\underline{\quad}$.



【答案】 $x = 1$ 或 $x = -1$

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 和正比例函数 $y = mx$ 的部分图象相交于点 $C(1, 2)$,

$\therefore$ 另一个交点为: $(-1, -2)$,

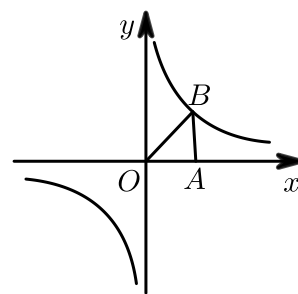
$\therefore$ 方程 $\frac{k}{x} = mx$ 的实数根为: $x_1 = 1, x_2 = -1$.

【标注】 【知识点】 反比例函数与方程、不等式

【能力】 运算能力

【思想】 数形结合思想

5. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在 x 轴上, 点 B 在第一象限内, $\angle OAB = 90^\circ$, $OA = AB$, $\triangle OAB$ 的面积为 2, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 B .



(1) 求 k 的值.

(2) 已知点 P 坐标为 $(a, 0)$, 过点 P 作直线 OB 的垂线 l , 点 O, A 关于直线 l 的对称点分别为 O', A' , 若线段 $O'A'$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象有公共点, 直接写出 a 的取值范围.

【答案】 (1) 4.

(2) $-2 \leq a \leq 1 - \sqrt{5}$ 或 $2 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$.

【解析】 (1) $\because \angle OAB = 90^\circ, OA = AB$,

$\therefore$ 设点 B 的坐标为 (m, m) , 则 $OA = AB = m$,

$\because \triangle OAB$ 的面积为 2,

$$\therefore \frac{1}{2}m \cdot m = 2,$$

解得: $m = 2$ (负值舍去),

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 2)$,

代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中, 得 $k = 4$.

(2) $\because B(2, 2)$,

$\therefore \angle BOA = 45^\circ$.

$\therefore l \perp OB$,

$\therefore O'A' \perp x$ 轴,

$\therefore P、O'、A'$ 三点共线, 且点 O' 在直线 OB 上,

$\therefore O'(a, a)、A'(a, a-2)$.

当 O' 在反比例函数图象上时, 有 $a \times a = 4$,

解得: $a_1 = -2, a_2 = 2$.

当 A' 在反比例函数图象上时, 有 $a \times (a-2) = 4$,

解得: $a_3 = 1 + \sqrt{5}, a_4 = 1 - \sqrt{5}$,

若线段 $O'A'$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象有公共点,

a 的取值范围是: $-2 \leq a \leq 1 - \sqrt{5}$ 或 $2 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$.

【标注】【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

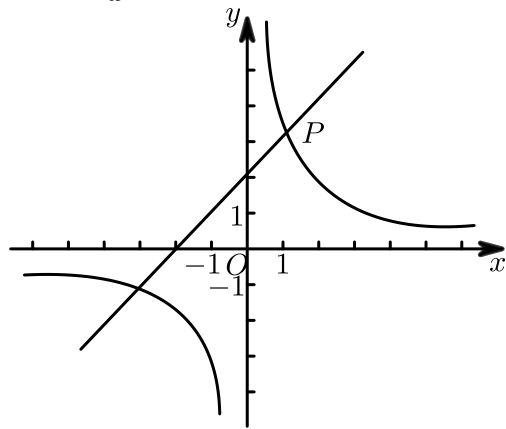
【知识点】反比例函数与方程、不等式

【知识点】反比例函数系数与图象关系

【知识点】坐标系中的对称-点关于特殊直线对称

【能力】运算能力

6. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $P(1, a)$.



(1) 求点 P 的坐标及反比例函数的解析式.

(2) 点 $Q(n, 0)$ 是 x 轴上的一个动点, 若 $PQ \leq 5$, 直接写出 n 的取值范围.

【答案】 (1) $P(1, 3), y = \frac{3}{x}$.

(2) $-3 \leq n \leq 5$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = x + 2$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象交于点 $P(1, a)$,

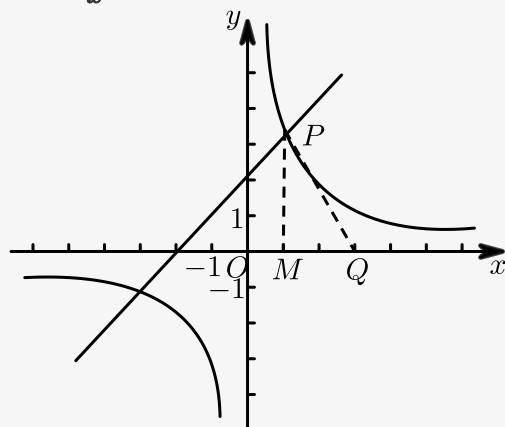
$\therefore a = 1 + 2 = 3$,

$\therefore P(1, 3)$,

$\therefore k = xy = 1 \times 3 = 3$,

$$\therefore y = \frac{3}{x} .$$

(2)



过 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M ,

$$\therefore PQ^2 = PM^2 + MQ^2 ,$$

$$\therefore PQ \leq 5 ,$$

$$\therefore 3^2 + (n-1)^2 \leq 5^2 ,$$

$$\therefore (n-1)^2 \leq 16 ,$$

$$-4 \leq n-1 \leq 4 ,$$

$$-3 \leq n \leq 5 .$$

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

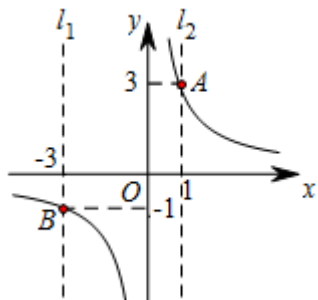
二、 反比例函数与不等式

1. 已知自变量取值范围，求函数值取值范围

线索

笔记

函数图象



自变量取值范围

$$x \leq -3$$

$$-3 < x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$$x \geq 1$$

函数值取值范围

$$-1 \leq y < 0$$

$$y < -1$$

$$y > 3$$

$$0 < y \leq 3$$



总结

7. 对于反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ ，当 $y \leq 2$ 时， x 的取值范围是 _____。

【答案】 $x \geq 3$ 或 $x < 0$

【解析】 当 $x > 0$ 时， $y \leq 2$ ， $x \geq 3$ ，

当 $x < 0$ 时， $y < 2$ ，

$\therefore x \geq 3$ 或 $x < 0$ 。

【标注】 【能力】运算能力

【知识点】 反比例函数与方程、不等式

【思想】 函数思想

8. 已知反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ ，则：

(1) 当 $-3 < x < -1$ 时，反比例函数 y 的取值范围是 _____。

(2) 当 $-3 < x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时， y 的取值范围是 _____。

(3) 当反比例函数 y 的取值范围是 $-3 < y < 1$ 且 $y \neq 0$ 时，自变量 x 的范围是 _____。

【答案】 (1) $-4 < y < -\frac{4}{3}$

(2) $y < -\frac{4}{3}$ 或 $y > 4$

(3) $x < -\frac{4}{3}$ 或 $x > 4$

【解析】 (1) $y = \frac{4}{x}$ 的函数图象如下图所示：

当 $-3 < x < -1$ 时，

将 $x = -3$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 中,

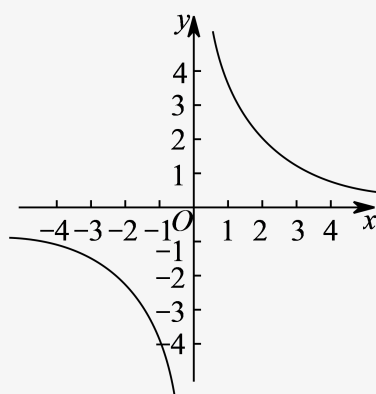
$$y = -\frac{4}{3},$$

将 $x = -1$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 中,

$$y = -4,$$

由函数图象可知:

$$-4 < y < -\frac{4}{3}.$$



(2) $\because -3 < x < 1$ 且 $x \neq 0$,

$\therefore -3 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$,

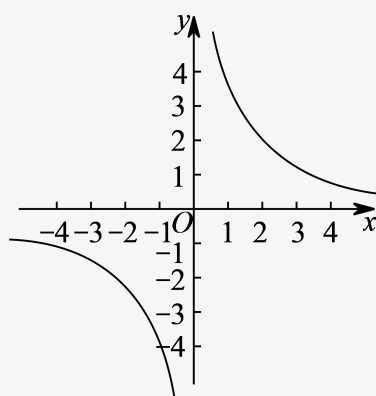
将 $x = -3$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 中, 得

$$y = -\frac{4}{3},$$

将 $x = 1$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 中, 得 $y = 4$

由函数图象可知: $y < -\frac{4}{3}$ 或

$$y > 4.$$



(3) 当 $-3 < y < 1$ 且 $y \neq 0$ 时,

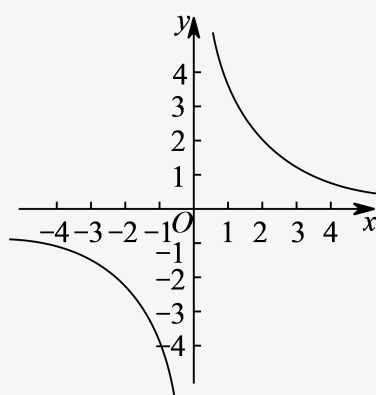
$-3 < y < 0$ 或 $0 < y < 1$.

当 $y = -3$ 时, $x = -\frac{4}{3}$,

当 $y = 1$ 时, $x = 4$,

由函数图象可知: $x < -\frac{4}{3}$ 或

$$x > 4.$$



【标注】【思想】数形结合思想

【思想】函数思想

【方法】图象法

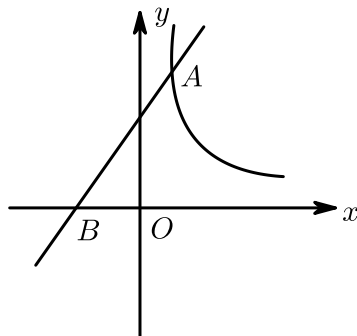
【方法】代入法

【知识点】反比例函数增减性

【知识点】反比例函数与方程、不等式

【能力】运算能力

9. 如图 . 一次函数 $y = x + b$ 的图象经过点 $B(-1, 0)$, 且与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为不等于 0 的常数) 的图象在第一象限交于点 $A(1, n)$. 求 :



- (1) 一次函数和反比例函数的解析式 .
 (2) 当 $1 \leq x \leq 6$ 时 , 反比例函数 y 的取值范围 .

【答案】 (1) $y = x + 1$, $y = \frac{2}{x}$.
 (2) $\frac{1}{3} \leq y \leq 2$.

【解析】 (1) 把点 $B(-1, 0)$ 代入一次函数 $y = x + b$ 得 : $0 = -1 + b$,

$$\therefore b = 1 ,$$

$$\therefore \text{一次函数解析式为 : } y = x + 1$$

$\therefore$ 点 $A(1, n)$ 在一次函数 $y = x + b$ 的图象上 ,

$$\therefore n = 1 + 1 ,$$

$$\therefore n = 2 ,$$

$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(1, 2)$.

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $A(1, 2)$,

$$\therefore k = 1 \times 2 = 2 ,$$

$\therefore$ 反比例函数关系式是 : $y = \frac{2}{x}$.

(2) 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 当 $x > 0$ 时 , y 随 x 的增大而减少 , 而当 $x = 1$ 时 , $y = 2$;
 $x = 6$ 时 , $y = \frac{1}{3}$,

$\therefore$ 当 $1 \leq x \leq 6$ 时 , 反比例函数 y 的值 : $\frac{1}{3} \leq y \leq 2$.

【标注】 【知识点】一次函数的解析式

【知识点】反比例函数的解析式

【知识点】反比例函数增减性

【知识点】反比例函数系数与图象关系

【知识点】反比例函数与一次函数综合

【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

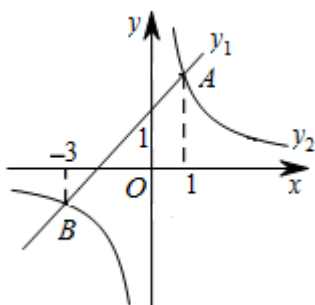
2. 反比例函数与不等式



对答如流——口述题

如图，一次函数 $y_1 = x + 2$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{3}{x}$ 相交于 $A(1, 3)$ 、 $B(-3, -1)$ 。

分别过 A 、 B 两点作 x 轴的垂线 l_2 、 l_1 ，则 l_1 、 l_2 、 y 轴将直线和双曲线分成四段： $x \leq -3$ ， $-3 < x < 0$ ， $0 < x < 1$ 、 $x \geq 1$ 。分段分析，然后填空：



当 $-3 < x < 0$ 或 $1 < x$ 时

$y_1 > y_2$

当 $x < -3$ 或 $0 < x < 1$ 时

$y_1 < y_2$

【方法】

口诀：“ y 轴左右分两区，交点两旁再划分；数形结合来分析，取等取0要当心。”

10. 已知关于 x 的方程 $ax + b = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的解为 -2 和 1 ，则不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为（ ）。

A. $x < -2$ 或 $0 < x < 1$

B. $x < -2$

C. $0 < x < 1$

D. $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$

【答案】D

【解析】由题意可得：

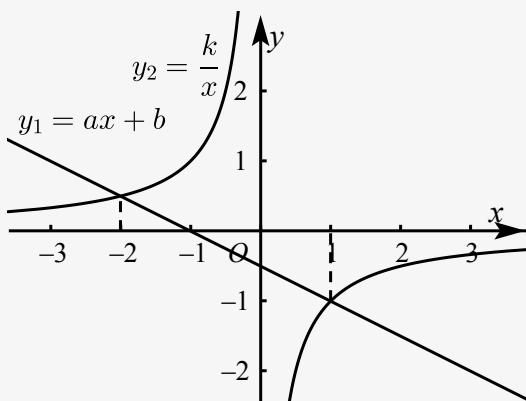
$$\text{令 } y_1 = ax + b, y_2 = \frac{k}{x} (k < 0)$$

$$\because ax + b = \frac{k}{x} (k < 0) \text{ 的解为 } -2 \text{ 和 } 1.$$

即函数 y_1 和 y_2 的图象交点横坐标为 -2 和 1

又函数 y_1 为一次函数， y_2 为反比例函数。

∴可画出大致图象为：



由图象关系可得：

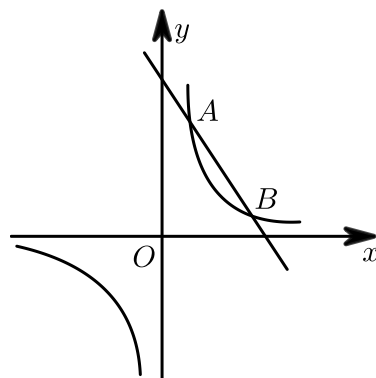
若 $ax + b < \frac{k}{x}$ ，则 $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$

即解集为 $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$.

故选D .

【标注】【知识点】反比例函数与方程、不等式

11. 如图，函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与函数 $y = -2x + 8$ 的图象交于点 $A(1, a)$ ， $B(b, 2)$ ，那么不等式 $\frac{k}{x} < -2x + 8$ 的解集是 _____ .



【答案】 $x < 0$ 或 $1 < x < 3$

【解析】 把 $A(1, a)$ ， $B(b, 2)$ 分别代入 $y = -2x + 8$ 得 $a = -2 + 8 = 6$ ， $-2b + 8 = 2$ ，解得 $b = 3$

,

∴ $A(1, 6)$ ， $B(3, 2)$ ，

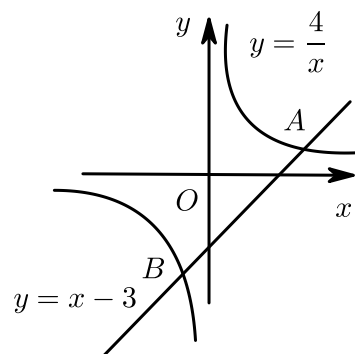
由函数图象可知，不等式 $\frac{k}{x} < -2x + 8$ 的解集为 $x < 0$ 或 $1 < x < 3$.

故答案为： $x < 0$ 或 $1 < x < 3$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】反比例函数与方程、不等式

12. 如图, 直线 $y = x - 3$ 与双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于 A 、 B 两点, 则不等式 $|x - 3| > \left| \frac{4}{x} \right|$ 的解集为 () .



- A. $-1 < x < 0$ 或 $x > 4$ B. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 4$
C. $x < -1$ 或 $x > 4$ D. $x < -1$ 或 $0 < x < 4$

【答案】 C

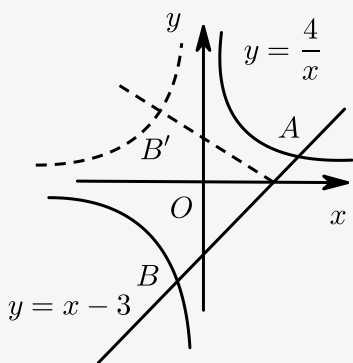
【解析】 由 $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x - 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$,

$\therefore B(-1, -4)$,

直线 $y = |x - 3|$ 与 $y = \left| \frac{4}{x} \right|$ 的交点为 $A(4, 1)$, $B'(-1, -4)$,

观察图形可知: 不等式 $|x - 3| > \left| \frac{4}{x} \right|$ 的解集为 $x < -1$ 或 $x > 4$.

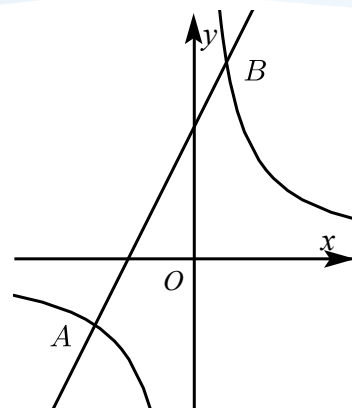
故选C.



【标注】 【知识点】反比例函数与方程、不等式

【能力】运算能力

13. 如图, 直线 $y = 2x + 4$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象相交于 $A(-3, a)$ 和 B 两点.



- (1) 求 k 的值 .
- (2) 直线 $y = m (m > 0)$ 与直线 AB 相交于点 M , 与反比例函数的图象相交于点 N . 若 $MN = 4$, 求 m 的值 .
- (3) 直接写出不等式 $\frac{6}{x-5} > x$ 的解集 .

【答案】 (1) 6 .

(2) 2 或 $6 + 4\sqrt{3}$.

(3) $x < -1$ 或 $5 < x < 6$.

【解析】 (1) $a = -2$, $A(-3, -2)$, $-2 = \frac{k}{-3} \Rightarrow k = 6$.

故答案为 : 6 .

(2) 设 $M\left(\frac{m-4}{2}, m\right)$, $N\left(\frac{6}{m}, m\right)$, $\therefore MN = \left|\frac{6}{m} - \frac{m-4}{2}\right| = 4$,

$$\therefore \textcircled{1} \frac{12 - m^2 + 4m}{2m} = 4 \Rightarrow 12 - m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 ,$$

$$\therefore m_1 = -6 \text{ (舍)} \text{ 或 } m_2 = 2 ;$$

$$\textcircled{2} \frac{12 - m^2 + 4m}{2m} = -4 \Rightarrow 12 - m^2 + 4m = -8m \Rightarrow m^2 - 12m - 12 = 0 ,$$

$$\therefore m = 6 + 4\sqrt{3} ;$$

综上 : $m = 2$ 或 $6 + 4\sqrt{3}$.

故答案为 : $m = 2$ 或 $6 + 4\sqrt{3}$.

(3) $x < -1$ 或 $5 < x < 6$.

【标注】 【知识点】反比例函数与一次函数综合

14. 阅读下面材料 : 上课时李老师说这样一个问题 : 对于任意实数 x , 关于 x 的不等式

$x^2 - 2x - 1 - a > 0$ 恒成立 , 求 a 的取值范围 .

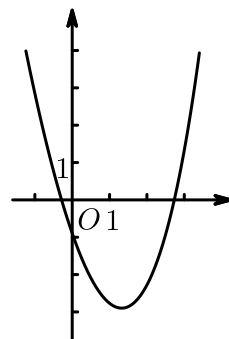
小捷的思路是 : 原不等式等价于 $x^2 - 2x - 1 > a$, 设函数 $y_1 = x^2 - 2x - 1$, $y_2 = a$, 画出两个函数的图象的示意图 , 于是原问题转化为函数 y_1 的图象在 y_2 的图象上方时 a 的取值范围 .

请结合小捷的思路回答 :

对于任意实数 x ，关于 x 的不等式 $x^2 - 2x - 1 - a > 0$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____。

参考小捷思考问题的方法，解决问题：

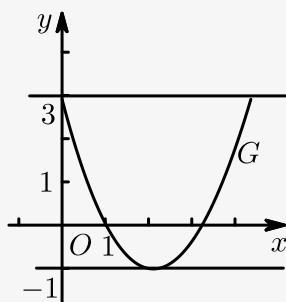
关于 x 的方程 $x - 4 = \frac{a-3}{x}$ 在 $0 < x < 4$ 范围内有两个解，求 a 的取值范围。



【答案】 $a < -2$ ； $-1 < a \leq 3$ 。

【解析】 $a < -2$ ；

解决问题：



将原方程转化为 $x^2 - 4x + 3 = a$ 。

设函数 $y_1 = x^2 - 4x + 3$ ， $y_1 = a$ ，

记函数 y_1 在 $0 < x < 4$ 内的图象为 G ，

于是原问题转化为 $y_2 = a$ 与 G 有两个

交点时 a 的取值范围，结合图象可知

a 的取值范围是： $-1 < a \leq 3$ 。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

三、反比例函数的应用

反比例函数在实际生活和科学领域都有广泛的应用，我们通过对题目的阅读理解，抽象出实际问题中的函数关系，将文字转化为数学语言，再利用反比例函数的思想方法来解决实际问题。

1. 用反比例函数解决实际问题的方法和步骤

 线 索	 笔 记
步骤	① 审清题意，找出题目中的常量、变量，并理清常量与变量之间的关系。 ② 根据常量与变量之间的关系，设出函数的关系式，待定的系数用字母来表示。 ③ 由题目中的已知条件列出方程，求出待定系数。 ④ 写出函数关系式，并注意关系式中的自变量的取值范围。 ⑤ 用函数关系去解决实际问题。
 总 结	

2. 运用反比例函数模型解觉实际问题时，要掌握一些基本的模型



线索

常见的反比例函数关系

【注意】



笔记

(1) 当长方体体积为定值时, 底面积与高成反比例函数关系, 当三角形面积为定值时, 底边长与高成反比例函数关系.

(2) 当工程总量为定值时, 工作时间与工作效率成反比例函数关系.

(3) 当力 F 所作的功一定时, 力 F 与物体在 F 方向通过的距离 s 成反比例函数关系.

(4) 杠杆定律: 力 $\times$ 力臂=定值.

(5) 压强公式: $P = \frac{F}{S}$, 其中 P 为压强, F 为压力, S 为受力面积.

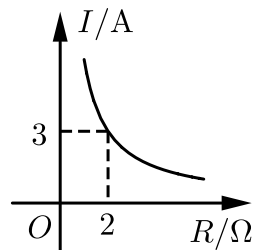
① 求出函数关系式后, 要注意自变量的取值范围;

② 求出问题的解, 既要符合题目中的方程, 还要符合实际意义.



总结

15. 已知蓄电池的电压为定值, 使用蓄电池时, 电流 I (单位: A) 与电阻 R (单位: Ω) 是反比例函数关系, 它的图象如图所示. 如果以此蓄电池为电源的用电器限制电流不能超过 $6A$, 那么用电器的可变电阻 R 应控制在 () .



A. $R \geq 2$

B. $0 < R \leq 2$

C. $R \geq 1$

D. $0 < R \leq 1$

【答案】 C

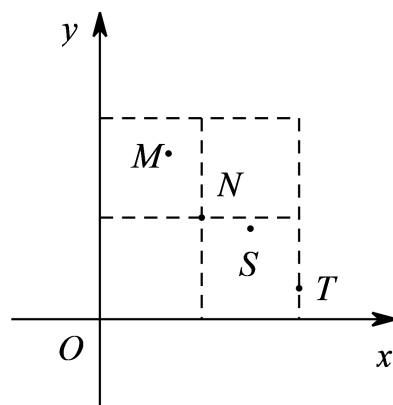
【解析】 由函数图象可知, 反比例函数经过 $(2, 3)$.

故反比例函数解析式为 $I = \frac{6}{R}$.

当 $I \leq 6$ 时, $R \geq 1$.

【标注】【知识点】反比例函数的实际应用

16. “单词的记忆效率”是指复习一定量的单词,一周后能正确默写出的单词个数与复习的单词个数的比值.右图描述了某次单词复习中 M, N, S, T 四位同学的单词记忆效率 y 与复习的单词个数 x 的情况,则这四位同学在这次单词复习中正确默写出的单词个数最多的是().



A. M

B. N

C. S

D. T

【答案】C

【解析】依题可知,

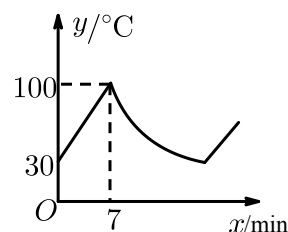
$$\text{单词记忆效率 } y = \frac{\text{正确的写出单词个数 } k}{\text{复习的单词个数 } x},$$

故正确默写出的单词个数 $k = \text{单词记忆效率 } y \times \text{复习单词个数 } x$,

过 M, N, S, T 的反比例函数中,过点 S 的 k 值最大.

【标注】【知识点】反比例函数的实际应用

17. 某品牌的饮水机接通电源后就进入自动程序:开机加热到水温 100°C ,停止加热,水温开始下降,此时水温 $y (^{\circ}\text{C})$ 与开机后用时 x (min)成反比例关系,直至水温降至 30°C ,饮水机关机.饮水机关机后即刻自动开机,重复上述自动程序.若在水温为 30°C 时,接通电源后,水温 $y (^{\circ}\text{C})$ 和时间 x (min)的关系如图所示,则水温从 100°C 降到 35°C 所用的时间是 _____ min.



【答案】 13

【解析】 设一次函数关系式为： $y = k_1x + b$ ，

将 $(0, 30)$ ， $(7, 100)$ 代入 $y = k_1x + b$ 得 $k_1 = 10$ ， $b = 30$ ，

$\therefore y = 10x + 30$ ($0 \leq x \leq 7$)，

设反比例函数关系式为： $y = \frac{k}{x}$ ，

将 $(7, 100)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = 700$ ，

$\therefore y = \frac{700}{x}$ ，

将 $y = 35$ 代入 $y = \frac{700}{x}$ ，解得 $x = 20$ 。

$\therefore$ 水温从 100°C 降到 35°C 所用的时间是 $20 - 7 = 13$ 分钟。

【标注】 【知识点】 反比例函数与一次函数综合

18. 水产公司有一种海产品共2104千克，为寻求合适的销售价格，进行了8天试销，试销情况如表：

	第1天	第2天	第3天	第4天	第5天	第6天	第7天	第8天
售价 x (元/千克)	400		250	240	200	150	125	120
销售量 y (千克)	30	40	48		60	80	96	100

观察表中数据，发现可以用反比例函数刻画这种海产品的每天销售量 y (千克)与销售价格 x (元/千克)之间的关系。现假定在这批海产品的销售中，每天的销售量 y (千克)与销售价格 x (元/千克)之间都满足这一关系。

(1) 补全表格。

(2) 这个反比例函数的解析式为 _____。

(3) 在试销8天后，公司决定将这种海产品的销售价格定为150元/千克，并且每天都按这个价格销售，那么余下的这些海产品预计再用 _____ 可以全部售出。

【答案】 (1)

	第1天	第2天	第3天	第4天	第5天	第6天	第7天	第8天
售价 x (元/千克)	400	300	250	240	200	150	125	120
销售量 y (千克)	30	40	48	50	60	80	96	100

(2) $y = \frac{12000}{x}$

(3) 20

【解析】(1) 填表如下：

	第1天	第2天	第3天	第4天	第5天	第6天	第7天	第8天
售价 x (元/千克)	400	300	250	240	200	150	125	120
销售量 y (千克)	30	40	48	50	60	80	96	100

(2) $\because xy = 12000$,

函数解析式为 $y = \frac{12000}{x}$.

(3) 销售8天后剩下的数量

$m = 2104 - (30 + 40 + 48 + 50 + 60 + 80 + 96 + 100) = 1600$ (千克),

当 $x = 150$ 时, $y = \frac{12000}{150} = 80$.

$\therefore \frac{m}{y} = 1600 \div 80 = 20$ (天),

$\therefore$ 余下的这些海产品预计再用20天可以全部售出.

【标注】【知识点】反比例函数的实际应用

19. 阅读下列材料：

实验数据显示，一般成人喝250毫升低度白酒后，其血液中酒精含量（毫克/百毫升）随时间的增加逐步增高达到峰值，之后血液中酒精含量随时间的增加逐渐降低.

小带根据相关数据和学习函数的经验，对血液中酒精含量随时间变化的规律进行了探究，发现血液中酒精含量 y 是时间 x 的函数，其中 y 表示血液中酒精含量（毫克/百毫升）， x 表示饮酒后的时间（小时）.

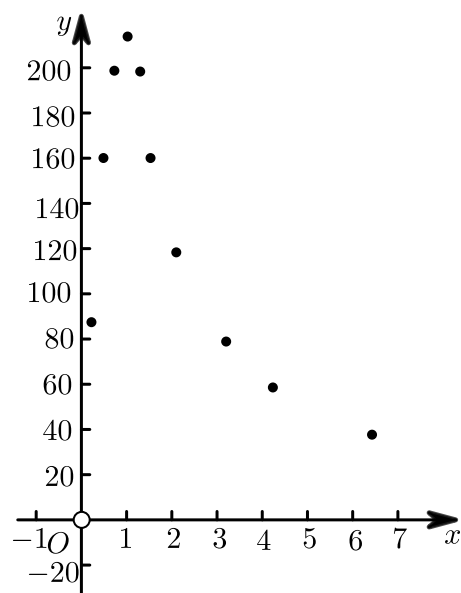
下表记录了6小时内11个时间点血液中酒精含量 y （毫克/百毫升）随饮酒后的时间 x （小时）（ $x > 0$ ）的变化情况.

饮酒后的 时间 x (小时)	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5	6	...
血液中酒 精含量 y (毫克/百 毫升)	...	$\frac{175}{2}$	150	$\frac{375}{2}$	200	$\frac{375}{2}$	150	$\frac{225}{2}$	$\frac{225}{3}$	$\frac{225}{4}$	45	$\frac{225}{6}$	...

下面是小带的探究过程，请补充完整：

(1)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以上表中各对数值为坐标描点，图中已给出部分点，请你描出剩余的点，画出血液中酒精含量 y 随时间 x 变化的函数图象．



- (2) 观察表中数据及图象可发现此函数图象在直线 $x = \frac{3}{2}$ 两侧可以用不同的函数表达式表示，请你任选其中一部分写出表达式．
- (3) 按国家规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升时属于“酒后驾驶”，不能驾车上路．参照上述数学模型，假设某驾驶员晚上20：30在家喝完250毫升低度白酒，第二题早上7：00能否驾车去上班？请说明理由．

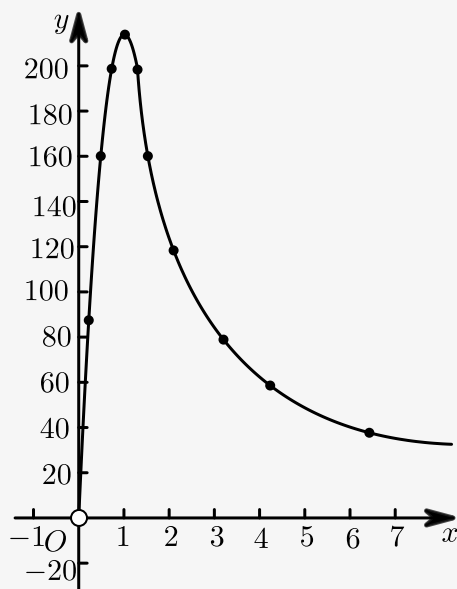
【答案】 (1) 画图见解析．

$$(2) \quad y = -200x^2 + 400x \quad (0 < x \leq \frac{3}{2})$$

$$\text{或 } y = \frac{225}{x} \quad (x > \frac{3}{2}) .$$

(3) 第二天早上7：45以后才可以驾驶，7：00不能驾车去上班．

【解析】 (1) 图象如图所示．



(2) $y = -200x^2 + 400x$ ($0 < x \leq \frac{3}{2}$)

或 $y = \frac{225}{x}$ ($x > \frac{3}{2}$) .

(3) 把 $y = 20$ 代入反比例函数 $y = \frac{225}{x}$ 得 $x = 1125$.

$\therefore$ 喝完酒经过1125小时为早上7 : 45 .

$\therefore$ 第二天早上7 : 45以后才可以驾驶 , 7 : 00不能驾车去上班 .

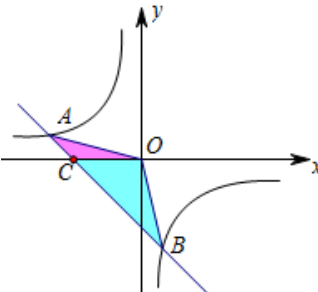
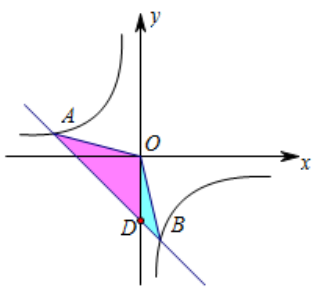
【标注】【知识点】函数图象与实际问题

四、反比例函数与三角形面积

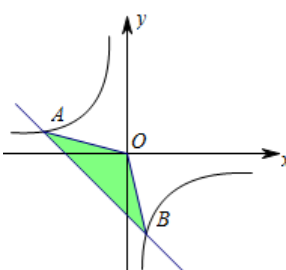
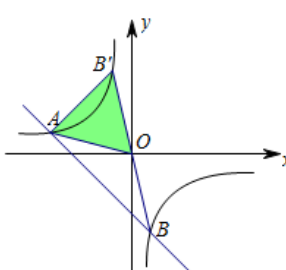
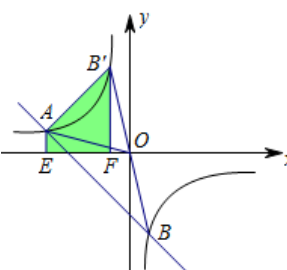


腾飞时刻

直线 AB 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 交于 A 、 B 两点 , 与 x 、 y 轴的交点分别为 C 、 D . 求 $\triangle AOB$ 的面积 .

🔍 线索	📝 笔记	
分割法求面积		
结论	$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle OCA} + S_{\triangle OCB}$	$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle ODB}$
📝 总结		

反比例函数图像关于原点成中心对称，延长 BO 交双曲线于点 B' ，连接 AB' ，则 $OB = OB'$ 。

 线索	 笔记		
面积转化			
结论	$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAB'} = S_{\text{梯形} AEFB'}$		
 总结			

🔍 线索	📝 笔记		
割补法求 $\triangle AOB$ 面积			
结论	$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCD} - S_{\triangle OBD} - S_{\triangle OAC}$	$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC} - S_{\triangle OAC}$	$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAD} - S_{\triangle OBD}$
✍️ 总结			

20. 如图1，矩形的一条边长为 x ，周长的一半为 y ，定义 (x, y) 为这个矩形的坐标，如图2，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x = 1$ ， $y = 3$ 将第一象限划分成4个区域，已知矩形1的坐标的对应点 A 落在如图所示的双曲线上，矩形2的坐标的对应点落在区域④中．
则下面叙述中正确的是（ ）．



图 1

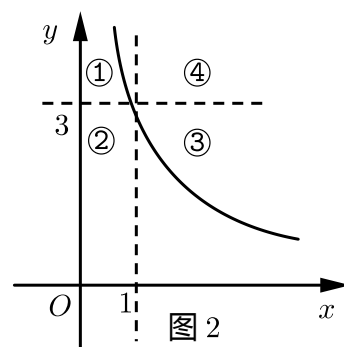


图 2

- A. 点 A 的横坐标有可能大于3
- B. 矩形1是正方形时，点 A 位于区域②
- C. 当点 A 沿双曲线向上移动时，矩形1的面积减小
- D. 当点 A 位于区域①时，矩形1可能和矩形2全等

【答案】 D

【解析】 因为矩形的一边长为 x ，周长的一半为 y ，

所以矩形的另一边长为 $y - x$ ．

由于矩形1的坐标的对应点落在如图所示的双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，

且由图可知，当 $x = 1$ 时， $y < 3$ ，

即 $k < 3$ ，所以当 $x = 3$ 时， $y < 1$ ，

此时矩形的另一边长 $y - x < 1 - 3 < 0$ ，不符合题意，

所以点A的横坐标不可能大于3，故A选项错误．

当矩形1是正方形时，则 $x = y - x$ ，

即 $y = 2x$ ，易得 $y = 2x$ 与函数 $y = \frac{k}{x}$ ， $k < 3$ 的交点在区域③中，故B选项错误．

矩形的面积 $S = x(y - x) = x\left(\frac{k}{x} - x\right) = k - x^2$ ，为开口向下的二次函数，

当点A沿双曲线向上移动时， x 逐渐减小，此时面积逐渐增大，故C选项错误．

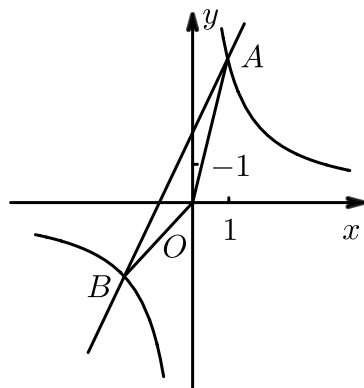
当点A在区域①时，不妨取(0.5, 5)，矩形2在区域④，不放取(4.5, 5)，

此时两个矩形都是一边长为0.5，另一边长为4.5的矩形，两个矩形全等，故D选项正确．

故选D．

【标注】【知识点】反比例函数与四边形综合

21. 如图，已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y = 2x + 2$ 的图象交于点A(m, 4)和点B．



(1) 求 k 的值和点B的坐标．

(2) 连接OA，OB，求 $\triangle AOB$ 的面积．

(3) 若点C在y轴上，且 $S_{\triangle BOC} = 2S_{\triangle AOB}$ ，求点C的坐标．

【答案】 (1) $k = 4$ ， $B(-2, -2)$ ．

(2) 3．

(3) $C(0, 6)$ 或 $C(0, -6)$ ．

【解析】 (1) $\because$ 点A(m, 4)在 $y = 2x + 2$ 上，

$$\therefore 2m + 2 = 4, m = 1,$$

$$\therefore A(1, 4),$$

将A(1, 4)代入 $y = \frac{k}{x}$ 中得

$$\frac{k}{1} = 4, k = 4,$$

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

$$\therefore 2x + 2 = \frac{4}{x},$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = -2,$$

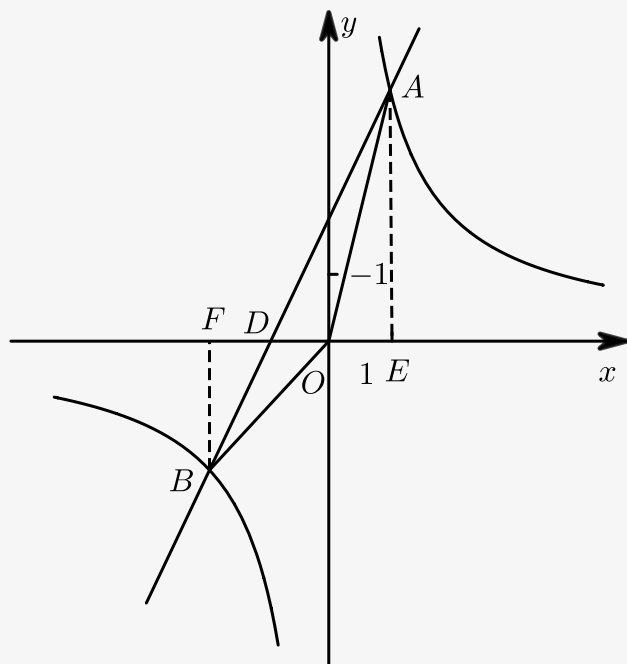
$\therefore B$ 点在第三象限,

$$\therefore x_B = -2,$$

$$\therefore y_B = \frac{4}{x_B} = \frac{4}{-2} = -2,$$

$$\therefore B(-2, -2).$$

(2) $y = 2x + 2$ 与 x 轴交于点 D , 过 A 、 B 分别作 $AE \perp x$ 轴, $BF \perp x$ 轴于点 E 、 F ,



$$\therefore 2x + 2 = 0, x = -1,$$

$$\therefore D(-1, 0),$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot OD \cdot AE + \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BF$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3.$$

$$(3) S_{\triangle BOC} = 2S_{\triangle AOB} = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{设 } C(0, m), \text{ 则 } \frac{1}{2} |m| \cdot 2 = 6,$$

$$\text{解得 } m = \pm 6,$$

$$\therefore \text{点 } C(0, 6) \text{ 或 } (0, -6).$$

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = kx + b (k \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象的一个交点为 $M(1, m)$.

(1) 求 m 的值.

(2) 直线 l 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 连接 OM . 设 $\triangle AOB$ 的面积为 S_1 , $\triangle MOB$ 的面积为 S_2 , 若 $S_1 \geq 3S_2$, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) 4.

(2) $-2 \leq k < 0$ 或 $0 < k \leq 1$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $M(1, m)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上,

$$\therefore m = 4.$$

(2) 由题意, 得 $OA \geq 3$.

①当直线上 $y = kx + b$ 过点 $(3, 0)$ 和 $(1, 4)$ 时,

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ k + b = 4 \end{cases} \text{解得 } k = -2.$$

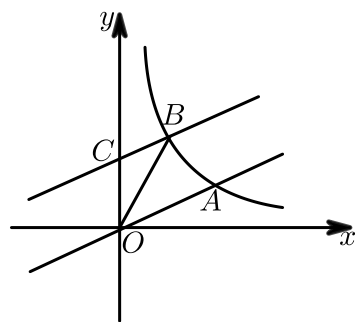
②当直线上 $y = kx + b$ 过点 $(-3, 0)$ 和 $(1, 4)$ 时,

$$\begin{cases} -3k + b = 0 \\ k + b = 4 \end{cases} \text{解得 } k = 1.$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 0 \text{ 或 } 0 < k \leq 1.$$

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

23. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 在第一象限内的图象相交于点 $A(2, 1)$.



(1) 求反比例函数的解析式.

(2) 将直线 $y = \frac{1}{2}x$ 向上平移后与反比例函数图象在第一象限内交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 且 $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求直线 BC 的解析式.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x}$.

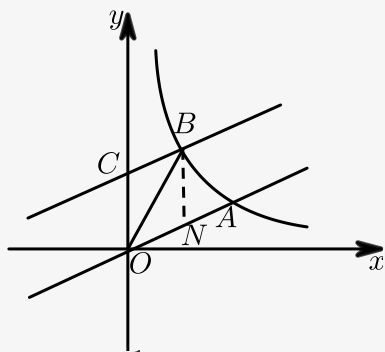
$$(2) y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

【解析】(1) 过 $A(2, 1)$ ，代入 $y = \frac{k}{x}$ ，

$$\therefore k = 2,$$

$$\therefore y = \frac{2}{x}.$$

(2) 过 B 作 $BN \parallel$ 于 y 轴交 OA 于 N 点，



$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}(y_B - y_N)(x_A - x_O) = \frac{3}{2},$$

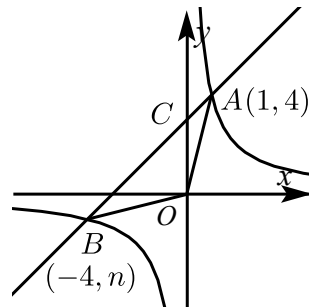
$$\therefore y_B - y_N = \frac{3}{2},$$

$$\therefore CO = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BC: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

24. 如图，已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y = x + b$ 的图象交于点 $A(1, 4)$ ，点 $B(-4, n)$ 。



(1) 求 n 和 b 的值。

(2) 求 $\triangle OAB$ 的面积。

(3) 直接写出一次数值大于反比例函数值的自变量 x 的取值范围。

【答案】(1) $b = 3$ ， $n = -1$ 。

(2) 7.5。

(3) 当 $x > 1$ 或 $-4 < x < 0$ 时，一次函数值大于反比例函数值。

【解析】(1)

把A点(1,4)分别代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ，一次函数 $y = x + b$ ，得 $k = 1 \times 4$ ，

$1 + b = 4$ ，解得 $k = 4$ ， $b = 3$ 。

$\therefore$ 点B(-4,n)也在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\therefore n = \frac{4}{-4} = -1.$$

故答案为： $b = 3$ ， $n = -1$ 。

(2) 如图，设直线 $y = x + 3$ 与y轴的交点为C，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

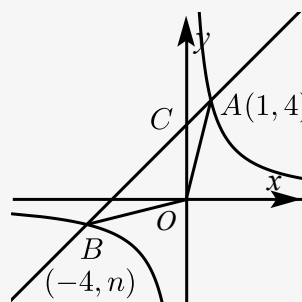
$\therefore C(0, 3)$ ，

$$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 7.5.$$

故答案为：7.5。

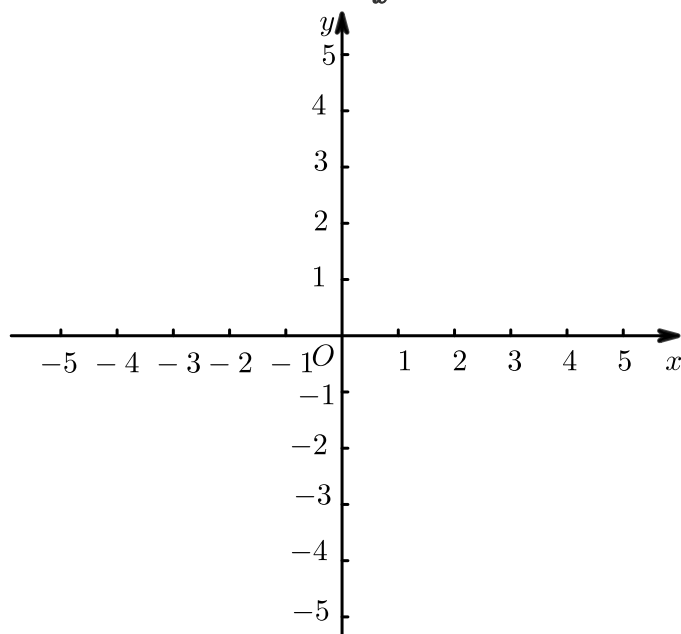
(3) $\therefore B(-4, -1)$ ， $A(1, 4)$ ，

$\therefore$ 根据图象可知：当 $x > 1$ 或 $-4 < x < 0$ 时，一次函数值大于反比例函数值。



【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x - 1$ 与y轴交于点A，与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于点B(m, 2)。



(1) 求点B的坐标及k的值。

(2) 将直线 AB 平移, 使它与 x 轴交于点 C , 与 y 轴交于点 D , 若 $\triangle ABC$ 的面积为6, 求直线 CD 的表达式.

【答案】 (1) $B(3, 2)$, $k = 6$.

(2) $l_{CD}: y = x + 3$ 或 $y = x - 5$.

【解析】 (1) $\because y = x - 1$ 过点 $B(m, 2)$,

$$\therefore 2 = m - 1,$$

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore B(3, 2).$$

$$\because y = \frac{k}{x} \text{ 过 } B,$$

$$\therefore k = 6.$$

(2) 设直线 CD 解析式为 $y = x - 1 + b$,

直线 AB 与 x 轴交于点 E ,

则 $E(1, 0)$, $A(0, -1)$, $C(1 - b, 0)$,

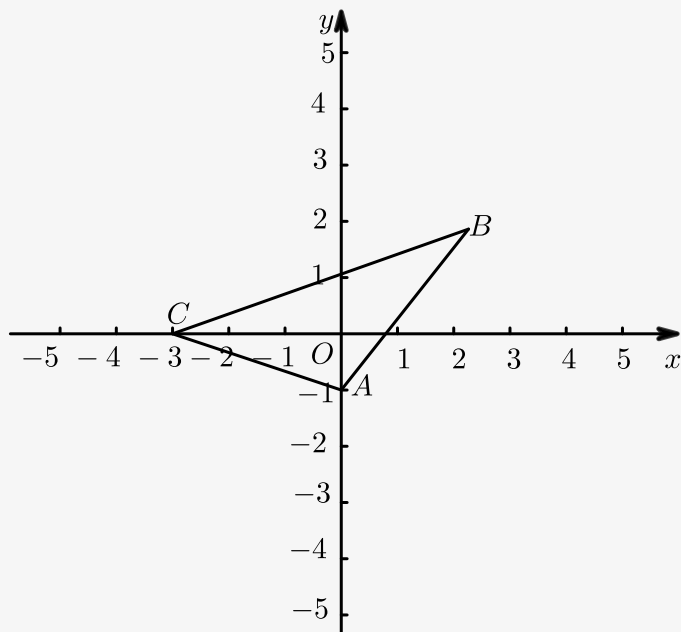
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CE \cdot |y_B - y_A| = 6,$$

$$\frac{1}{2} CE \cdot 3 = 6,$$

$$\therefore CE = 4,$$

$$\therefore C(5, 0) \text{ 或 } (-3, 0).$$

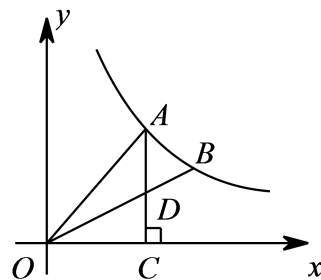
$$\therefore l_{CD}: y = x + 3 \text{ 或 } y = x - 5.$$



【标注】【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

五、反比例函数与几何综合

26. 如图, A, B 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上的两点, 过 A 点作 $AC \perp x$ 轴, 交 OB 于 D 点, 垂足为 C , 若 $\triangle ADO$ 的面积为 2, D 为 OB 的中点, 则 k 的值为 ().



- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. 6 D. 8

【答案】 B

【解析】 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E ,

$\because D$ 为 OB 的中点,

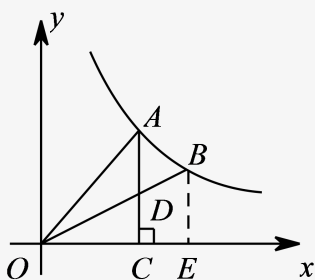
$\therefore CD$ 是 $\triangle OBE$ 的中位线, 即 $CD = \frac{1}{2} BE$.

设 $A(x, \frac{k}{x})$, 则 $B(2x, \frac{k}{2x})$, $CD = \frac{k}{4x}$, $AD = \frac{k}{x} - \frac{k}{4x}$,

$\because \triangle ADO$ 的面积为 2,

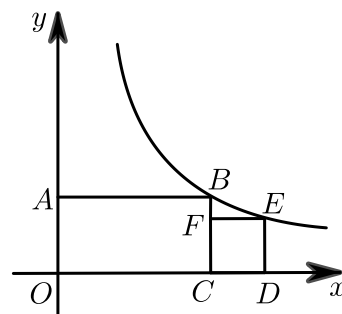
$\therefore \frac{1}{2} AD \cdot OC = 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{k}{x} - \frac{k}{4x} \right) \cdot x = 2$, 解得 $k = \frac{16}{3}$,

故选: B.



【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

27. 如图, 矩形 $OABC$ 的一个顶点与坐标原点重合, OC 、 OA 分别在 x 轴和 y 轴上, 正方形 $CDEF$ 的一条边在 x 轴上, 另一条边 CF 在 BC 上, 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象经过 B 、 E 两点, 已知 $OA = 2$, 则正方形的边长是 ().



A. $2\sqrt{3} - 2$

B. $\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3} - 2$

D. $4 - 2\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象经过 B 点, $BC = AO = 2$,

$\therefore$ 当 $y = 2$ 时, $x = 4$, 即 $B(4, 2)$,

设正方形的边长为 a , 则 $OD = 4 + a$, $DE = a$,

$\therefore E(4 + a, a)$,

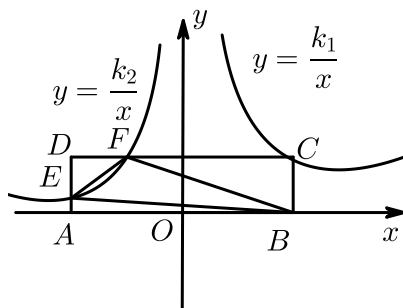
代入反比例函数 $y = \frac{8}{x}$, 可得 $a(4 + a) = 8$,

解得 $a = 2\sqrt{3} - 2$ 或 $a = -2\sqrt{3} - 2$ (舍去)

$\therefore$ 正方形的边长是 $2\sqrt{3} - 2$.

【标注】 【知识点】反比例函数的系数 k 的几何意义

28. 如图, 矩形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 x 轴上, 且关于 y 轴对称, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 C , 反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (x < 0)$ 的图象分别与 AD, CD 交于点 E, F , 若 $S_{\triangle BEF} = 7$, $k_1 + 3k_2 = 0$, 则 k_1 等于 _____.



【答案】 9

【解析】 设点 B 的坐标为 $(a, 0)$, 则 A 点坐标为 $(-a, 0)$,

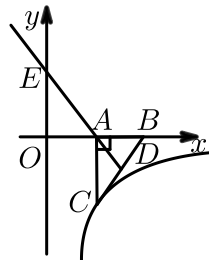
由图象可知, 点 $C(a, \frac{k_1}{a})$, $E(-a, -\frac{k_2}{a})$, $D(-a, \frac{k_1}{a})$, $F(-\frac{a}{3}, \frac{k_1}{a})$,

矩形 $ABCD$ 面积为: $2a \cdot \frac{k_1}{a} = 2k_1$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle DEF} &= \frac{DE \cdot DF}{2} = \frac{\frac{2}{3}a \times \left(-\frac{2k_2}{a}\right)}{2} = -\frac{2}{3}k_2, \\ S_{\triangle BCF} &= \frac{CF \cdot BC}{2} = \frac{\frac{4}{3}a \times \frac{k_1}{a}}{2} = \frac{2}{3}k_1, \\ S_{\triangle ABE} &= \frac{AB \cdot AE}{2} = \frac{2a \times \left(-\frac{k_2}{a}\right)}{2} = -k_2, \\ \therefore S_{\triangle BEF} &= 7, \\ \therefore 2k_1 + \frac{2}{3}k_2 - \frac{2}{3}k_1 + k_2 &= 7 \text{ ①} \\ \therefore k_1 + 3k_2 &= 0, \\ \therefore k_2 &= -\frac{1}{3}k_1 \text{ 代入①式得: } \frac{4}{3}k_1 + \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{3}k_1\right) = 7, \\ \text{解得: } k_1 &= 9. \\ \text{故答案为: } 9.\end{aligned}$$

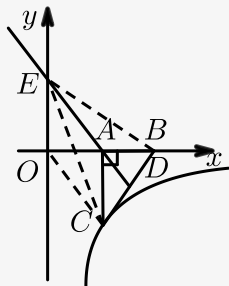
【标注】【知识点】反比例函数的系数k的几何意义

29. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ，边 AB 在 x 轴上， BC 边上的中线 AD 的反向延长线交 y 轴于点 $E(0, 3)$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象过点 C ，则 k 的值为 _____ .



【答案】 -6

【解析】 连接 BE 、 CE 、 OC ，



$$\begin{aligned}\therefore CD &= BD, \\ \therefore S_{\triangle ACD} &= S_{\triangle ABD}, \\ S_{\triangle ECD} &= S_{\triangle EBD}, \\ \therefore S_{\triangle EAC} &= S_{\triangle EAB} = \frac{1}{2}AB \cdot OE,\end{aligned}$$

$$\because AB = 2, E(0, 3), OE = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle EAB} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle EAC} = 3,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \parallel y\text{轴},$$

$$\therefore S_{\triangle EAC} = S_{\triangle ACO} = \frac{|k|}{2} = 3,$$

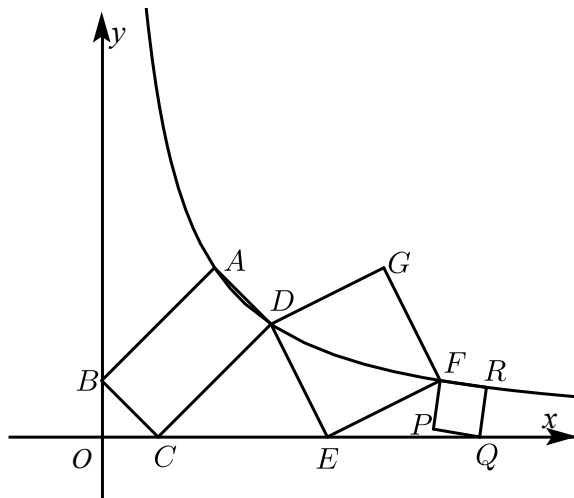
$$\therefore |k| = 6,$$

$$\because k < 0,$$

$$\therefore k = -6.$$

【标注】【知识点】根据条件求反比例函数解析式（或k的值）

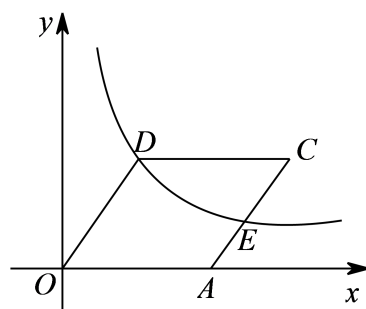
30. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 D 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ （ $x > 0$ ）的图象上，顶点 C 、 B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上，且 $\frac{AB}{BC} = 2$ ．再在其右侧作正方形 $DEFG$ 、 $FPQR$ （如图），顶点 F 、 R 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ （ $x > 0$ ）的图象上，顶点 E 、 Q 在 x 轴的正半轴上，则点 R 的坐标为 _____ ．



【答案】 $(3 + \sqrt{15}, -3 + \sqrt{15})$

【标注】【知识点】反比例函数与三角形的全等

31. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = \frac{k}{x}$ （ $k > 0, x > 0$ ）的图象经过菱形 $OACD$ 的顶点 D 和边 AC 的中点 E ，若菱形 $OACD$ 的边长为3，则 k 的值为 _____ ．



【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】 过 D 作 $DQ \perp x$ 轴于 Q ，过 C 作 $CM \perp x$ 轴于 M ，过 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F ，

设 D 点的坐标为 (a, b) ，则 C 点的坐标为 $(a + 3b)$ ，

$\because E$ 为 AC 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}b, AF = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}a,$$

E 点的坐标为 $(3 + \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$ ，

$$\text{把 } D、E \text{ 的坐标代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 得：} k = ab = \left(3 + \frac{1}{2}a\right) \cdot \frac{1}{2}b,$$

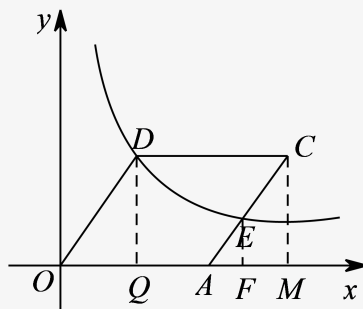
解得： $a = 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DQO$ 中，由勾股定理得： $a^2 + b^2 = 3^2$ ，

$$\text{即 } 2^2 + b^2 = 9,$$

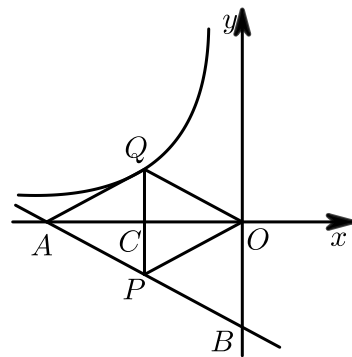
解得： $b = \sqrt{5}$ （负数舍去），

$$\therefore k = ab = 2\sqrt{5}.$$



【标注】 【知识点】反比例函数与四边形综合

32. 如图，一次函数 $y = -\frac{1}{2}x - 4$ 的图象分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点， P 为 AB 的中点， $PC \perp x$ 轴于点 C ，延长 PC 交反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象于点 Q ，且 $QC = \frac{1}{2}OC$ 。



(1) 求 k 的值.

(2) 连接 OP , AQ , 求证: 四边形 $APOQ$ 是菱形.

【答案】 (1) -8 .

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 由直线 $y = -\frac{1}{2}x - 4$ 得,

$$A(-8, 0), B(0, -4),$$

$\therefore P$ 为 AB 中点,

$$\therefore P(-4, -2),$$

$\therefore PC \perp x$ 轴,

$$\therefore C(-4, 0),$$

$$\therefore CO = 4,$$

$$\therefore QC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore Q(-4, 2),$$

$$\therefore k = -4 \times 2 = -8.$$

(2) $\because A(-8, 0), O(0, 0),$

$\therefore C(-4, 0)$ 为 AO 中点,

$\therefore P(-4, -2), Q(-4, 2),$

$\therefore C(-4, 0)$ 为 PQ 中点,

即 AO, PQ 互相平分,

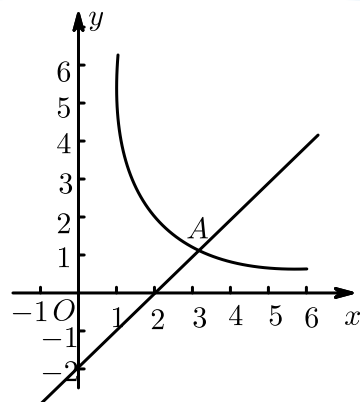
$\therefore$ 四边形 $APOQ$ 为平行四边形,

$\therefore PQ \perp AO,$

$\therefore$ 平行四边形 $APOQ$ 为菱形.

【标注】【知识点】菱形的判定-从平行四边形

33. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象与直线 $y = x - 2$ 交于点 $A(3, m)$.



(1) 求 k 、 m 的值.

(2) 已知点 $P(n, n)$ ($n > 0$), 过点 P 作平行于 x 轴的直线, 交直线 $y = x - 2$ 于点 M , 过点 P 作平行于 y 轴的直线, 交函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象于点 N .

① 当 $n = 1$ 时, 判断线段 PM 与 PN 的数量关系, 并说明理由.

② 若 $PN \geq PM$, 结合函数的图象, 直接写出 n 的取值范围.

【答案】 (1) $k = 3$, $m = 1$.

(2) ① $PM = PN$, 证明见解析.

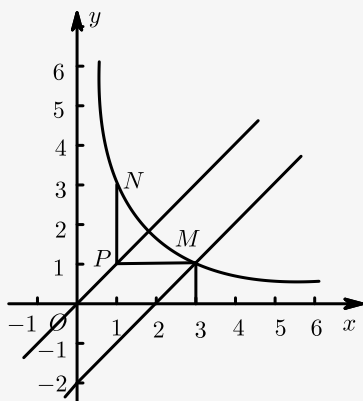
② $0 < n \leq 1$ 或 $n \geq 3$.

【解析】 (1) $\because$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象与直线 $y = x - 2$ 交于点 $A(3, m)$,

$\therefore m = 3 - 2 = 1$, $A(3, 1)$, $k = 3 \times 1 = 3$.

即 k 的值为 3, m 的值为 1.

(2) ① 当 $n = 1$ 时, $P(1, 1)$,



令 $y = 1$, 代入 $y = x - 2$ 得 $x = 3$,

$\therefore M(3, 1)$,

$\therefore PM = 2$.

令 $x = 1$, 代入 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 得 $y = 3$,

$\therefore N(1, 3)$,

$$\therefore PN = 2,$$

$$\therefore PM = PN.$$

$$\textcircled{2} \because P(n, n),$$

$\therefore$ 点 P 在直线 $y = x$ 上,

过点 P 作平行于 x 轴的直线, 交直线 $y = x - 2$ 于点 M ,

$$\therefore M(n + 2, n), PM = 2.$$

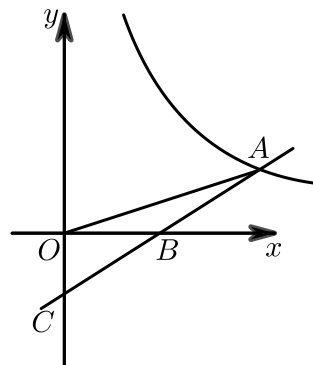
$$\therefore PN \geq PM,$$

$$\therefore PN \geq 2,$$

观察图象可知 $0 < n \leq 1$ 或 $n \geq 3$.

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合

34. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象交于点 A , 与 x 轴交于点 $B(5, 0)$, 若 $OB = AB$, 且 $S_{\triangle OAB} = \frac{15}{2}$.



(1) 求反比例函数与一次函数的表达式.

(2) 若点 P 为 x 轴上一点, $\triangle ABP$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$.

(2) P 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(10, 0)$ 或 $(13, 0)$ 或 $(\frac{65}{8}, 0)$.

【解析】 (1) 如图1, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D ,

$$\because B(5, 0),$$

$$\therefore OB = 5,$$

$$\because S_{\triangle OAB} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times AD = \frac{5}{12},$$

$$\therefore AD = 3,$$

$$\because OB = AB,$$

$$\therefore AB = 5,$$

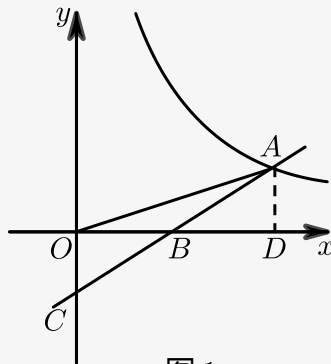


图 1

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 4$,

$$\therefore OD = OB + BD = 9,$$

$$\therefore A(9, 3),$$

将点 A 坐标代入反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 中得, $m = 9 \times 3 = 27$,

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{27}{x},$$

将点 $A(9, 3)$, $B(5, 0)$ 代入直线 $y = kx + b$ 中, $\begin{cases} 9k + b = 3 \\ 5k + b = 0 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{15}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}.$$

(2) 由 (1) 知, $AB = 5$,

$\therefore \triangle ABP$ 是等腰三角形,

$\therefore$ ① 当 $AB = PB$ 时,

$$\therefore PB = 5,$$

$$\therefore P(0, 0) \text{ 或 } (10, 0),$$

② 当 $AB = AP$ 时, 如图 2,

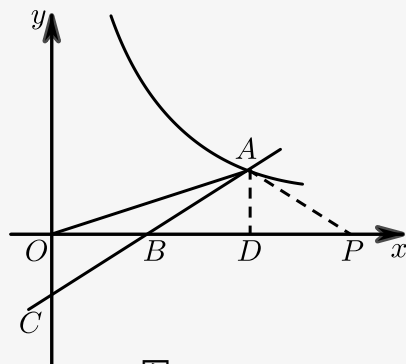


图 2

由 (1) 知, $BD = 4$,

易知, 点 P 与点 B 关于 AD 对称,

$$\therefore DP = BD = 4,$$

$$\therefore OP = 5 + 4 + 4 = 13,$$

$$\therefore P(13, 0),$$

③ 当 $PB = AP$ 时, 设 $P(a, 0)$,

$$\therefore A(9, 3), B(5, 0),$$

$$\therefore AP^2 = (9 - a)^2 + 9, BP^2 = (5 - a)^2,$$

$$\therefore (9 - a)^2 + 9 = (5 - a)^2,$$

$$\therefore a = \frac{65}{8},$$

$$\therefore P\left(\frac{65}{8}, 0\right),$$

即：满足条件的点 P 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(10, 0)$ 或 $(13, 0)$ 或 $(\frac{65}{8}, 0)$.

【标注】【知识点】反比例函数与一次函数综合